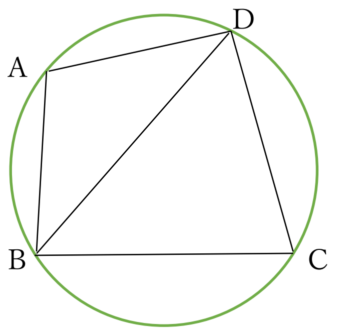

$AB = a\,, BC = b\,, CD = c\,, DA = d\,, BD = x$

と置くと、公式より、$BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}}$

今回は四角形 ABCD の面積の公式を作る。

△ＡＢＤでヘロンの公式を使うと、

$s = \frac{a+d+x}{2}$と置くと、$\triangle ABD = \sqrt{s(s-a)(s-d)(s-x)}$

よって、代入すると、

$$\triangle ABD = \sqrt{\left(\frac{a+d+x}{2}\right)\left(\frac{a+d+x}{2}-a\right)\left(\frac{a+d+x}{2}-d\right)\left(\frac{a+d+x}{2}-x\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+d+x}{2}\right)\left(\frac{-a+d+x}{2}\right)\left(\frac{a-d+x}{2}\right)\left(\frac{a+d-x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+d+x)(-a+d+x)(a-d+x)(a+d-x)}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{\{x^2+2dx-(a+d)(a-d)\}\{-x^2+2dx+(a-d)(a+d)\}}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{\{-x^4+(a^2-d^2)x^2+4d^2x^2+(a^2-d^2)x^2-(a^2-d^2)^2\}}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{\{-x^4+2(a^2+d^2)x^2-(a^2-d^2)^2\}}}{4} \text{———①}$$

また、$BD = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}}$より、$x = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}}$ よって、まずは△ABD の面積を求める。

$-x^4 = \frac{-(ac+bd)^2(ab+cd)^2}{(ad+bc)^2}$ $2(a^2+d^2)x^2 = \frac{2(a^2+d^2)(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}$ より、

$-x^4+2(a^2+d^2)x^2-(a^2-d^2)^2 =$

$$\frac{-(ac+bd)^2(ab+cd)^2}{(ad+bc)^2}+\frac{2(a^2+d^2)(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}-(a^2-d^2)^2$$
$$=\frac{-(ac+bd)^2(ab+cd)^2+2(ad+bc)(a^2+d^2)(ab+cd)(ac+bd)-(ad+bc)^2(a^2-d^2)^2}{(ad+bc)^2}$$

―――②

$$-(ac+bd)^2(ab+cd)^2=-(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)(a^2+2abcd+c^2d^2)$$
$$=-(a^4b^2c^2+2a^3bc^3d+a^2c^4d^2+2a^3b^3cd+4a^2b^2c^2d^2+2abc^3d^3$$
$$+a^2b^4d^2+2ab^3cd^3+b^2c^2d^4)$$
$$=-a^4b^2c^2-a^2c^4d^2-a^2b^4d^2-b^2c^2d^4-2a^3bc^3d-2a^3b^3cd$$
$$-4a^2b^2c^2d^2-2abc^3d^3-2ab^3cd^3 \text{―――ア}$$

$$2(a^2+d^2)(ad+bc)(ac+bd)(ab+cd)$$
$$=2(a^3d+a^2bc+ad^3+bcd^2)(a^2bc+ac^2d+ab^2d+bcd^2)$$
$$=2(a^5bcd+a^4c^2d^2+a^4b^2d^2+a^3bcd^3+a^4b^2c^2+a^3bc^3d+a^3b^3cd$$
$$+a^2b^2c^2d^2+a^3bcd^3+a^2c^2d^4+a^2b^2d^4+abcd^5+a^2b^2c^2d^2+abc^3d^3$$
$$+ab^3cd^3+b^2c^2d^4)$$
$$=2(a^4c^2d^2+a^4b^2d^2+a^4b^2c^2+a^2c^2d^4+a^2b^2d^4+b^2c^2d^4+a^5bcd$$
$$+a^3bcd^3+a^3bc^3d+a^3b^3cd+2a^2b^2c^2d^2+a^3bcd^3+abcd^5+abc^3d^3$$
$$+ab^3cd^3)$$
$$=2a^4c^2d^2+2a^4b^2d^2+2a^4b^2c^2+2a^2c^2d^4+2a^2b^2d^4+2b^2c^2d^4$$
$$+2a^5bcd+2a^3bcd^3+2a^3bc^3d+2a^3b^3cd+4a^2b^2c^2d^2+2a^3bcd^3$$
$$+2abcd^5+2abc^3d^3+2ab^3cd^3 \text{―――イ}$$

$$-(ad+bc)^2\left(a^2-d^2\right)^2=-\left(a^2d^2+2abcd+b^2c^2\right)\left(a^4-2a^2d^2+d^4\right)$$
$$=-\left(a^6d^2-2a^4d^4+a^2d^6+2a^5bcd-4a^3bcd^3+2abcd^5+a^4b^2c^2\right.$$
$$\left.-2a^2b^2c^2d^2+b^2c^2d^4\right)$$
$$=-a^6d^2+2a^4d^4-a^2d^6-2a^5bcd+4a^3bcd^3-2abcd^5-a^4b^2c^2$$
$$+2a^2b^2c^2d^2-b^2c^2d^4 \text{―――ウ}$$

ア＋イ＋ウより②の分子は、

$$
\text{分子} = -a^4b^2c^2 - a^2c^4d^2 - a^2b^4d^2 - b^2c^2d^4 - 2a^3bc^3d - 2a^3b^3cd - 4a^2b^2c^2d^2
$$

$$
- 2abc^3d^3 - 2ab^3cd^3 + 2a^4c^2d^2 + 2a^4b^2d^2 + 2a^4b^2c^2 + 2a^2c^2d^4
+ 2a^2b^2d^4 + 2b^2c^2d^4 + 2a^5bcd + 2a^3bcd^3 + 2a^3bc^3d + 2a^3b^3cd
+ 4a^2b^2c^2d^2 + 2a^3bcd^3 + 2abcd^5 + 2abc^3d^3 + 2ab^3cd^3 - a^6d^2 + 2a^4d^4
- a^2d^6 - 2a^5bcd + 4a^3bcd^3 - 2abcd^5 - a^4b^2c^2 + 2a^2b^2c^2d^2 - b^2c^2d^4
$$

同じ色部分が消えて、残りの黒部分を取り出すと、

$$
= -a^2c^4d^2 - a^2b^4d^2 - 4a^2b^2c^2d^2 + 2a^4c^2d^2 + 2a^4b^2d^2 + 2a^2c^2d^4 + 2a^2b^2d^4
+ 2a^3bcd^3 + 4a^2b^2c^2d^2 + 2a^3bcd^3 - a^6d^2 + 2a^4d^4 - a^2d^6 + 4a^3bcd^3
+ 2a^2b^2c^2d^2
$$

さらに、同じ色同士を計算すると、

$$
\begin{aligned}
&= -a^6d^2 + 2a^4b^2d^2 + 2a^4c^2d^2 + 2a^4d^4 + 8a^3bcd^3 - a^2b^4d^2 + 2a^2b^2c^2d^2 + 2a^2b^2d^4 \\
&\quad - a^2c^4d^2 + 2a^2c^2d^4 - a^2d^6 \\
&\quad = a^2d^2(-a^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 8abcd - b^4 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 \\
&\quad - c^4 + 2c^2d^2 - d^4) \\
&\quad = a^2d^2(-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 \\
&\quad + 2c^2d^2 + 8abcd) \\
&\quad = a^2d^2\{-(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) + 4a^2b^2 - (c^4 + d^4 + 2c^2d^2) + 4c^2d^2 \\
&\quad + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 8abcd\} \\
&\quad = a^2d^2\{-(a^2 + b^2)^2 - (c^2 + d^2)^2 + 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 2a^2(c^2 + d^2) \\
&\quad + 2b^2(c^2 + d^2) + 8abcd\} \\
&\quad = a^2d^2\{-(a^2 + b^2)^2 - (c^2 + d^2)^2 + 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\
&\quad + 4(a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd)\} \\
&\quad = a^2d^2[-\{(a^2 + b^2)^2 + (c^2 + d^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)\} + 4(ab + cd)^2] \\
&\quad = a^2d^2[-\{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)\}^2 + 2^2(ab + cd)^2] \\
&\quad = a^2d^2[2(ab + cd) + \{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)\}][2(ab + cd) \\
&\quad - \{(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)\}] \\
&\quad = a^2d^2(a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd)(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2 + 2ab \\
&\quad + 2cd) = a^2d^2\{(a + b)^2 - (c - d)^2\}\{-(a - b)^2 + (c + d)^2\} \\
&\quad = a^2d^2(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)
\end{aligned}
$$

よって、$\text{分子} = a^2d^2(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)$

これを②に代入すると、

$$-x^4+2(a^2+d^2)x^2-(a^2-d^2)^2$$
$$=\frac{-(ac+bd)^2(ab+cd)^2+2(ad+bc)(a^2+d^2)(ab+cd)(ac+bd)-(ad+bc)^2(a^2-d^2)^2}{(ad+bc)^2}$$
$$=\frac{a^2d^2(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}{(ad+bc)^2} ---③$$

③を①に代入すると、

$$\triangle ABD=\frac{\sqrt{\{-x^4+2(a^2+d^2)x^2-(a^2-d^2)^2\}}}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{a^2d^2(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}}{4(ad+bc)}$$
$$=\frac{ad\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}}{4(ad+bc)}$$

ところで、四角形 ABCD は円に内接する四角形より∠A と∠C は補角をなしている。

（∠A＋∠C＝１８０°）よって、１つの角が補角をなしている三角形の面積比の公式

より、△ABD：△CDB＝AB×AD：CB×CD＝$ad:bc$　よって、

$$\triangle CDB=\frac{bc\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}}{4(ad+bc)}$$

よって、

$$四角形ABCD=\triangle ABD+\triangle CDB$$
$$=\frac{\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}}{4}$$

よって、円に内接する四角形の面積の公式が作れた。因みに、$s=\frac{a+b+c+d}{2}$と置くと、

$S=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$　（S は四角形 ABCD の面積）