フェルマーの最終定理（制限付きの一般のｎの場合）の証明

cが素数の場合

希暮竜輔

フェルマーの最終定理はｎ＝３，４の場合などが初等的に証明されていて、例えば、ｎ＝１５の場合などは、$(a^5)^3+(b^5)^3=(c^5)^3$とすれば成り立つa,b,cが存在しない事は自明なので、あとはｎが奇素数の場合のみを考えれば良い。そこで、$a^n+b^n=c^n$（ｎは奇素数）が成り立つ自然数a,b,cが存在すると仮定して、$a=1,b=1$とすると$c^n=2$となり、自然数ｃは存在しない。よって、以後、$a\geqq 1,b\geqq 2$または$a\geqq 2,b\geqq 1$の場合を考察する。ｎが奇数より、

$$a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-2}b^2-\ ・・・・-ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=c^n$$

ここで、ｃが素数より、次のようにｎ＋１通りに場合分け出来る。

（１）$a+b=1,a^n+b^n=c^n$の場合、a,bは自然数より矛盾。

（２）$a+b=c,a^n+b^n=c^n$の場合、第１式を第２式に代入すると、$a^n+b^n=(a+b)^n$　ところで、a,bは自然数より$a^n+b^n<(a+b)^n$ よって、矛盾。

（３）$a+b=c^2,a^n+b^n=c^n$の場合、$(a+b)^n=c^{2n}$―――①　また、$(a^n+b^n)^2=c^{2n}$―――②　①, ②より、$(a^n+b^n)^2=(a+b)^n$　ところで、補題より、$(a^n+b^n)^2>(a+b)^n$　よって、矛盾。

（４）$a+b=c^3,a^n+b^n=c^n$の場合、$(a+b)^n=c^{3n}$―――①　また、$(a^n+

$b^n)^3 = c^{3n}$———②　①, ②より、$(a^n + b^n)^3 = (a + b)^n$　ところで、補題より、

$(a^n + b^n)^2 > (a + b)^n$　$\therefore (a^n + b^n)^3 > (a^n + b^n)^2 > (a + b)^n$

$\therefore (a^n + b^n)^3 > (a + b)^n$　よって、矛盾。

（５）$a + b = c^4, a^n + b^n = c^n$の場合、$(a + b)^n = c^{4n}$———①　また、$(a^n + b^n)^4 = c^{4n}$———②　①, ②より、$(a^n + b^n)^4 = (a + b)^n$　ところで、補題より、

$(a^n + b^n)^2 > (a + b)^n$　$\therefore (a^n + b^n)^4 > (a^n + b^n)^2 > (a + b)^n$

$\therefore (a^n + b^n)^4 > (a + b)^n$　よって、矛盾。

・

・

・

（ｎ）$a + b = c^{n-1}, a^n + b^n = c^n$の場合、$(a + b)^n = c^{n(n-1)}$———①　また、$(a^n + b^n)^{n-1} = c^{n(n-1)}$———②　①, ②より、$(a^n + b^n)^{n-1} = (a + b)^n$　ところで、補題より、$(a^n + b^n)^2 > (a + b)^n$　$\therefore (a^n + b^n)^{n-1} > (a^n + b^n)^2 > (a + b)^n$

$\therefore (a^n + b^n)^{n-1} > (a + b)^n$　よって、矛盾。

（ｎ＋１）$a + b = c^n, a^n + b^n = c^n$の場合、$a + b = a^n + b^n$　ところで、a, bは$a \geqq 1, b \geqq 2$または$a \geqq 2, b \geqq 1$の自然数より矛盾。

（１）～（ｎ＋１）より、背理法によりｃが素数の場合、フェルマーの最終定理が示された。

補題

$(a^n+b^n)^2>(a+b)^n$の証明　ただし、$a \geqq 1, b \geqq 2$または$a \geqq 2, b \geqq 1$

証明

（ｉ）$a \geqq b$の場合、$a^{2n}=a^n \cdot a^n \geqq 2^n \cdot a^n=(2a)^n=(a+a)^n \geqq (a+b)^n$

$\therefore a^{2n} \geqq (a+b)^n$　$\therefore a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}>(a+b)^n$

$\therefore (a^n+b^n)^2>(a+b)^n$

（ⅱ）$b \geqq a$の場合、$b^{2n}=b^n \cdot b^n \geqq 2^n \cdot b^n=(2b)^n=(b+b)^n \geqq (a+b)^n$

$\therefore b^{2n} \geqq (a+b)^n$　$\therefore a^{2n}+2a^nb^n+b^{2n}>(a+b)^n$

$\therefore (a^n+b^n)^2>(a+b)^n$

（ｉ),（ⅱ）より、$(a^n+b^n)^2>(a+b)^n$

よって、示された。