フェルマーの最終定理　ｎ＝３の場合の新証明

希暮竜輔

$a^3+b^3=c^3$が成り立つ互いに素な自然数a,b,cが存在すると仮定すると、

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=c^3$　ここで、$c=xy$（x,yは自然数）と置くと、

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=x^3y^3$　よって、次の１０通りの場合が考えられる。

（ⅰ）$a+b=1, a^2-ab+b^2=x^3y^3$の場合

（ⅱ）$a+b=xy, a^2-ab+b^2=x^2y^2$の場合

（ⅲ）$a+b=x^2y^2, a^2-ab+b^2=xy$ の場合

（ⅳ）$a+b=x^3y^3, a^2-ab+b^2=1$ の場合

（ⅴ）$a+b=x, a^2-ab+b^2=x^2y^3$の場合

（ⅵ）$a+b=x^2, a^2-ab+b^2=xy^3$の場合

（ⅶ）$a+b=x^3, a^2-ab+b^2=y^3$の場合

（ⅷ）$a+b=xy^2, a^2-ab+b^2=x^2y$の場合

（ⅸ）$a+b=xy^3, a^2-ab+b^2=x^2$の場合

（ⅹ）$a+b=x^2y^3, a^2-ab+b^2=x$の場合

一応、この１０通りしかない事を証明しておく。x^3y^3の約数の個数は、公式より、

（３＋１）（３＋１）＝１６個。よって、$(a+b, a^2-ab+b^2)$の組は１６組だが、xとyを

入れ換えて同じになるものは除くので、まず、xとyを入れ換えても変わらないものを

考えると、$(1,x^3y^3)$，(xy,x^2y^2)，(x^2y^2,xy)，$(x^3y^3,1)$の４通りのみ。よって。ダブリ分を除くと、(１６－４)÷２＋４＝６＋４＝１０通り（または、１６－(１６－４)÷２＝１６－６＝１０通り）

（ⅰ）$a+b=1\,,a^2-ab+b^2=x^3y^3$の場合、$a,b$は自然数より、$a+b\geqq 2$ よって、矛盾。

（ⅱ）$a+b=xy\,,a^2-ab+b^2=x^2y^2$の場合、$(a+b)^2=x^2y^2$より、$(a+b)^2=a^2-ab+b^2$ $\therefore a^2+2ab+b^2=a^2-ab+b^2$ $\therefore 3ab=0$ $\therefore ab=0$　a,bは自然数より矛盾。

（ⅲ）$a+b=x^2y^2\,,a^2-ab+b^2=xy$ の場合、$b=x^2y^2-a$ これを次の式に代入すると、

$a^2-a(x^2y^2-a)+(x^2y^2-a)^2=xy$ $\therefore a^2-x^2y^2a+a^2+x^4y^4-2x^2y^2a+a^2=xy$

$\therefore 3a^2-3x^2y^2a+x^4y^4-xy=0$ よって、判別式$D=9x^4y^4-12(x^4y^4-xy)=-3x^4y^4+12xy=3xy(4-x^3y^3)\geqq 0$　$xy>0$より、$4-x^3y^3\geqq 0$　x,yは自然数より$x=y=1$のみ。

$\therefore a+b=1$　a,bは自然数より矛盾。

（ⅳ）$a+b=x^3y^3\,,a^2-ab+b^2=1$ の場合、$(a-b)^2+ab=1$　$a\geqq 1,b\geqq 1$より、この式を満たすのは$a=b=1$のみ。ところが、$a+b=x^3y^3$より、$x^3y^3=2$　これを満たす自然数x,yは存在しないので矛盾。

（ⅴ）$a+b=x\,,a^2-ab+b^2=x^2y^3$の場合、$(a+b)^2=x^2$ $\therefore a^2+2ab+b^2=x^2$――①

また、$a^2-ab+b^2=x^2y^3$――②

①－②より、$3ab=x^2-x^2y^3=x^2(1-y^3)=x^2(1-y)(1+y+y^2)$

$x^2>0,\ y^2+y+1>0,\ 3ab>0$より、$1-y>0$　$\therefore y<1$　yは自然数より矛盾。

（ⅵ）$a+b=x^2$, $a^2-ab+b^2=xy^3$の場合、$c=xy$のx,yを$x \leqq y$としても一般性を失わない。ところで、$(a+b)^3>a^3+b^3$　また、$a^3+b^3=c^3=x^3y^3$

$\therefore (x^2)^3>x^3y^3$　$\therefore x^6>x^3y^3$　$\therefore x^3>y^3$　$\therefore x>y$　よって、矛盾。

（ⅶ）$a+b=x^3, a^2-ab+b^2=y^3$の場合、$(a+b)^2=x^6$より、$a^2+2ab+b^2=x^6$———①　また、$a^2-ab+b^2=y^3$———②

①－②より、$3ab=x^6-y^3=(x^2)^3-y^3=(x^2-y)(x^4+x^2y+y^2)$

$\therefore 3ab=(x^2-y)\{(x^2-y)^2+3x^2y\}$

（Ⅰ）$x^2-y=3m$（m は整数）の場合

$3ab=3m\{(3m)^2+3x^2y\}=3m(9m^2+3x^2y)=9m(3m^2+x^2y)$ $\therefore ab=3m(3m^2+x^2y)$

よって、a,bのうち、少なくとも一方は 3 の倍数である。———☆

また、$a^3+b^3=c^3$に$a=3p+1, b=3q+2, c=3r$（p,q,rは整数）とすると、

$$
\begin{aligned}
a^3+b^3=(3p+1)^3+(3q+2)^3 &= 27p^3+27p^2+9p+1+27q^3+54q^2+36q+8 \\
&= 27p^3+27q^3+27p^2+54q^2+9p+36q+9 \\
&= 9(3p^3+3q^3+3p^2+6q^2+p+4q+1)
\end{aligned}
$$

一方、$c^3=(3r)^3=27r^3$　よって、両辺とも 9 の倍数となるので成り立つ場合がある。

よって、a,bの少なくとも一方が 3 の倍数とは限らない。———☆☆

☆，☆☆より、矛盾。

（Ⅱ）$x^2-y=3m+1$（m は整数）の場合

$3ab=(3m+1)\{(3m+1)^2+3x^2y\}$　よって、左辺は 3 の倍数で、右辺は 3 で割ると 1 余

る数と 3 で割ると 1 余る数の積より 3 で割ると 1 余る数となり、矛盾。

（Ⅲ）$x^2 - y = 3m + 2$（m は整数）の場合

$3ab = (3m+2)\{(3m+2)^2 + 3x^2y\}$　よって、左辺は 3 の倍数で、右辺は 3 で割ると 2 余る数と 3 で割ると 1 余る数の積より 3 で割ると 2 余る数となり、矛盾。

（ⅷ）$a + b = xy^2$, $a^2 - ab + b^2 = x^2y$の場合、$b = xy^2 - a$ これを次の式に代入すると、

$a^2 - a(xy^2 - a) + (xy^2 - a)^2 = x^2y$ $\therefore a^2 - xy^2a + a^2 + x^2y^4 - 2xy^2a + a^2 = x^2y$

$\therefore 3a^2 - 3xy^2a + x^2y^4 - x^2y = 0$

よって、判別式$D = 9x^2y^4 - 12(x^2y^4 - x^2y) = -3x^2y^4 + 12x^2y = 3x^2y(4 - y^3) \geqq 0$

$x^2y > 0$より、$4 - y^3 \geqq 0$　yは自然数より$y = 1$のみ。

$\therefore a + b = x,\ a^2 - ab + b^2 = x^2$　$\therefore (a+b)^2 = x^2$　$\therefore (a+b)^2 = a^2 - ab + b^2$

$\therefore 3ab = 0$　a, bは自然数より矛盾。

（ⅸ）$a + b = xy^3$, $a^2 - ab + b^2 = x^2$の場合、$b = xy^3 - a$ これを次の式に代入すると、

$a^2 - a(xy^3 - a) + (xy^3 - a)^2 = x^2$ $\therefore a^2 - xy^3a + a^2 + x^2y^6 - 2xy^3a + a^2 = x^2$

$\therefore 3a^2 - 3xy^3a + x^2y^6 - x^2 = 0$

よって、判別式$D = 9x^2y^6 - 12(x^2y^6 - x^2) = -3x^2y^6 + 12x^2 = 3x^2(4 - y^6) \geqq 0$

$x^2 > 0$より、$4 - y^6 \geqq 0$　yは自然数より$y = 1$のみ。

$\therefore a + b = x,\ a^2 - ab + b^2 = x^2$　$\therefore (a+b)^2 = x^2$　$\therefore (a+b)^2 = a^2 - ab + b^2$

$\therefore 3ab = 0$　a, bは自然数より矛盾。

（ｘ）$a+b=x^2y^3$, $a^2-ab+b^2=x$の場合、$b=x^2y^3-a$ これを次の式に代入すると、

$a^2-a(x^2y^3-a)+(x^2y^3-a)^2=x$ $\therefore a^2-x^2y^3a+a^2+x^4y^6-2x^2y^3a+a^2=x$

$\therefore 3a^2-3x^2y^3a+x^4y^6-x=0$

よって、判別式$D=9x^4y^6-12(x^4y^6-x)=-3x^4y^6+12x=3x(4-x^3y^6)\geqq 0$

$x>0$より、$4-x^3y^6\geqq 0$　x,y は自然数より$x=y=1$のみ。

$\therefore a+b=1$　　a,bは自然数より矛盾。

（ｉ）～（ｘ）より、背理法により$a^3+b^3=c^3$が成り立つ互いに素な自然数a,b,cが存在しない。よって、フェルマーの最終定理ｎ＝３の場合が初等整数論的に示された。