

間違い探し その2

フェルマーの最終定理は $n = 3, 4$ の場合などが初等的に証明されていて、例えば、 $n = 15$ の場合などは、 $(a^5)^3 + (b^5)^3 = (c^5)^3$ とすれば成り立つ a, b, c が存在しない事は自明なので、あとは n が奇素数の場合のみを考えれば良い。そこで、 $a^n + b^n = c^n$ (n は奇素数) が成り立つ自然数 a, b, c が存在すると仮定すると、

(i) a : 偶数, b : 偶数, c : 偶数

(ii) a : 偶数, b : 奇数, c : 奇数 (a : 奇数, b : 偶数, c : 奇数)

(iii) a : 奇数, b : 奇数, c : 偶数

の3通りの場合があり、(i) の場合は両辺を2で割り続ければ、(ii) か (iii) の場合に帰着する。よって、(ii), (iii) の場合を示せば良い。

(ii) a : 偶数, b : 奇数, c : 奇数の場合、 $a = 2p, b = 2q + 1, c = 2r + 1$ (p, q, r は自然数) と置いて、 $a^n + b^n = c^n$ に代入すると、 $(2p)^n + (2q + 1)^n = (2r + 1)^n$
 $\therefore (2p)^n = (2r + 1)^n - (2q + 1)^n$ これを二項定理で展開すると、

$$\begin{aligned} 2^n p^n &= (2r)^n + {}_nC_1(2r)^{n-1} + {}_nC_2(2r)^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-2}(2r)^2 + {}_nC_{n-1}2r + 1 \\ &\quad - \left\{ (2q)^n + {}_nC_1(2q)^{n-1} + {}_nC_2(2q)^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-2}(2q)^2 + {}_nC_{n-1}2q + 1 \right\} \\ &= 2^n(r^n - q^n) + {}_nC_1 2^{n-1}(r^{n-1} - q^{n-1}) + {}_nC_1 2^{n-2}(r^{n-2} - q^{n-2}) + \cdots \\ &\quad + {}_nC_{n-2} 2^2(r^2 - q^2) + {}_nC_{n-1} 2(r - q) \end{aligned}$$

ここで、公式 $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ を考

えると、右辺は $2(r-q)$ で割り切れるので、左辺も $2(r-q)$ で割り切れ、左辺は偶数である。ところが、 n は奇素数より ${}_nC_{n-1}$ は奇数である。従って、右辺は偶数+奇数となり奇数である。よって、矛盾。

(iii) a : 奇数, b : 奇数, c : 偶数の場合、 $a = 2p + 1, b = 2q - 1, c = 2r$ (p, q, r は自然数) と置いて、 $a^n + b^n = c^n$ に代入すると、 $(2p + 1)^n + (2q - 1)^n = (2r)^n$ これを二項定理で展開すると、

$$\begin{aligned} 2^n r^n &= (2p)^n + {}_nC_1(2p)^{n-1} + {}_nC_2(2p)^{n-2} + \cdots + {}_nC_{n-2}(2p)^2 + {}_nC_{n-1}2p + 1^n \\ &\quad + \left\{ (2q)^n + {}_nC_1(2q)^{n-1}(-1) + {}_nC_2(2q)^{n-2}(-1)^2 + \cdots + \right. \\ &\quad \left. {}_nC_{n-2}(2q)^2(-1)^{n-2} + {}_nC_{n-1}2q(-1)^{n-1} + (-1)^n \right\} \end{aligned}$$

n は奇数より、末尾の 1^n と $(-1)^n$ は相殺され、

$$\begin{aligned} &= 2^n(p^n + q^n) + {}_nC_1 2^{n-1}(p^{n-1} - q^{n-1}) + {}_nC_1 2^{n-2}(p^{n-2} + q^{n-2}) + \cdots \\ &\quad + {}_nC_{n-2} 2^2(p^2 - q^2) + {}_nC_{n-1} 2(p + q) \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2^n r^n &= 2^n(p^n + q^n) + {}_nC_1 2^{n-1}(p^{n-1} - q^{n-1}) + {}_nC_1 2^{n-2}(p^{n-2} + q^{n-2}) + \cdots \\ &\quad + {}_nC_{n-2} 2^2(p^2 - q^2) + {}_nC_{n-1} 2(p + q) \text{———☆} \end{aligned}$$

ところで、 n が奇数の時、

$$\text{公式 } a^n + b^n = (a + b) \left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1} \right)$$

また、 n が偶数の時、

$$\text{公式 } a^n - b^n = (a - b) \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1} \right)$$

を利用すると、 n は奇素数より☆の右辺は $2(p+q)$ で割り切れるので、左辺も $2(p+q)$ で割り切れ、左辺は偶数となる。ところが、 n は奇素数より ${}_nC_{n-1}$ は奇数である。従って、右辺は偶数+奇数となり奇数である。よって、矛盾。

よって、(ii), (iii) より、背理法により、 $a^n + b^n = c^n$ (n は奇素数) が成り立つ自然数 a, b, c は存在しない。よって、フェルマーの最終定理が初等的に示された。