間違い探し　その３

フェルマーの最終定理はｎ＝３，４の場合などが初等的に証明されていて、例えば、ｎ＝１５の場合などは、$(a^5)^3+(b^5)^3=(c^5)^3$とすれば成り立つa,b,cが存在しない事は自明なので、あとはｎが奇素数の場合のみを考えれば良い。そこで、

$a^n+b^n=c^n$（ｎは奇素数）が成り立つ自然数a,b,cが存在すると仮定すると、

（ｉ）a：偶数，b：偶数，c：偶数

（ⅱ）a：偶数，b：奇数，c：奇数（a：奇数，b：偶数，c：奇数）

（ⅲ）a：奇数，b：奇数，c：偶数

の３通りの場合があり、（ｉ）の場合は両辺を２で割り続ければ、（ⅱ）か（ⅲ）の場合に帰着する。よって、（ⅱ），（ⅲ）の場合を示せば良い。

（ⅱ）a：偶数，b：奇数，c：奇数の場合

$a=2^mp$（ｐは奇数），$b=2q+1$，$c=2r+1$と置くと、$a^n+b^n=c^n$より、

$$a^n=c^n-b^n=(c-b)\left(c^{n-1}+c^{n-2}b+c^{n-3}b^2+\ \cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

$$=2(r-q)\left(c^{n-1}+c^{n-2}b+c^{n-3}b^2+\ \cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

$$\therefore(2^mp)^n=2(r-q)\left(c^{n-1}+c^{n-2}b+c^{n-3}b^2+\ \cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

$$\therefore 2^{mn}p^n=2(r-q)\left(c^{n-1}+c^{n-2}b+c^{n-3}b^2+\ \cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

ところで、$c^{n-1}+c^{n-2}b+c^{n-3}b^2+\ \cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}$はｎ個の和で$b,c,n$は全て奇数より奇数が奇数個で総和は奇数である。また、$2(r-q)=2^ls$（ｓは奇数）と

置くと、$2^{mn}p^n = 2^l s\left(c^{n-1} + c^{n-2}b + c^{n-3}b^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + b^{n-1}\right)$　ここで、$2^{mn} = 2^l$以外の場合は左辺と右辺の偶奇が一致しないので、$2^{mn} = 2^l$である。

$\therefore p^n = s\left(c^{n-1} + c^{n-2}b + c^{n-3}b^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + b^{n-1}\right)$

ここで、n＝3の場合、$p^3 = s(c^2 + cb + b^2)$

n＝5の場合、$p^5 = s(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4) = s\{c^4 + b^4 + cb(c^2 + cb + b^2)\} = s(c^4 + b^4) + cb \cdot p^3$　$\therefore p^5 = s(c^4 + b^4) + cb \cdot p^3$

n＝7の場合、$p^7 = s(c^6 + c^5b + c^4b^2 + c^3b^3 + c^2b^4 + cb^5 + b^6) = s\{c^6 + b^6 + cb(c^4 + c^3b + c^2b^2 + cb^3 + b^4)\} = s[c^6 + b^6 + cb\{c^4 + b^4 + cb(c^2 + cb + b^2)\}] = s(c^6 + b^6) + cb \cdot p^5$　$\therefore p^7 = s(c^6 + b^6) + cb \cdot p^5$

以後、同様に考えていくと、$p^n = s(c^{n-1} + b^{n-1}) + cb \cdot p^{n-2}$が成り立つ。

$\therefore p^n - cb \cdot p^{n-2} = s(c^{n-1} + b^{n-1})$　$\therefore p^{n-2}(p^2 - bc) = s(b^{n-1} + c^{n-1})$

$\therefore p^2 - bc = \frac{s(b^{n-1} + c^{n-1})}{p^{n-2}}$ ―――①

また、$p^n = s(c^{n-1} + b^{n-1}) + cb \cdot p^{n-2}$のnの所をn－2として同様の変形をすると、$p^2 - bc = \frac{s(b^{n-3} + c^{n-3})}{p^{n-4}}$ ―――②

①，②より、$\frac{s(b^{n-1} + c^{n-1})}{p^{n-2}} = \frac{s(b^{n-3} + c^{n-3})}{p^{n-4}}$　$\therefore (b^{n-1} + c^{n-1})p^{n-4} = (b^{n-3} + c^{n-3})p^{n-2}$

ここで、この等式が正しいかどうか調べてみる。そこで、$(b^{n-1} + c^{n-1})p^{n-4} - (b^{n-3} + c^{n-3})p^{n-2}$として、$p^{n-2} = c^{n-3} + c^{n-4}b + c^{n-5}b^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + cb^{n-4} + b^{n-3}$，$p^{n-4} = c^{n-5} + c^{n-6}b + c^{n-7}b^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + cb^{n-6} + b^{n-5}$を代入すると、

$(c^{n-1}+b^{n-1})p^{n-4}-(c^{n-3}+b^{n-3})p^{n-2}$

$$=(c^{n-1}+b^{n-1})\left(c^{n-5}+c^{n-6}b+c^{n-7}b^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+c^2b^{n-7}\right.$$

$$\left.+cb^{n-6}+b^{n-5}\right)$$

$$-(c^{n-3}+b^{n-3})\left(c^{n-3}+c^{n-4}b+c^{n-5}b^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+c^2b^{n-5}\right.$$

$$\left.+cb^{n-4}+b^{n-3}\right)$$

$$=c^{n-1}\left(c^{n-5}+c^{n-6}b+c^{n-7}b^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+c^2b^{n-7}+cb^{n-6}+b^{n-5}\right)$$

$$+b^{n-1}\left(c^{n-5}+c^{n-6}b+c^{n-7}b^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+cb^{n-6}+b^{n-5}\right)$$

$$-c^{n-3}\left(c^{n-3}+c^{n-4}b+c^{n-5}b^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+c^2b^{n-5}+cb^{n-4}+b^{n-3}\right)$$

$$-b^{n-3}\left(c^{n-3}+c^{n-4}b+c^{n-5}b^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+cb^{n-4}+b^{n-3}\right)$$

$$=c^{2n-6}+c^{2n-7}b+c^{2n-8}b^2+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+c^{n+1}b^{n-7}+c^nb^{n-6}+c^{n-1}b^{n-5}$$

$$+c^{n-5}b^{n-1}+c^{n-6}b^n+c^{n-7}b^{n+1}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+c^2b^{2n-8}+cb^{2n-7}+b^{2n-6}$$

$$-c^{2n-6}-c^{2n-7}b-c^{2n-8}b^2-\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot-c^{n-1}b^{n-5}-c^{n-2}b^{n-4}-c^{n-3}b^{n-3}$$

$$-c^{n-3}b^{n-3}-c^{n-4}b^{n-2}-c^{n-5}b^{n-1}-\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot-c^2b^{2n-8}-cb^{2n-7}-b^{2n-6}$$

$=-c^{n-2}b^{n-4}-c^{n-3}b^{n-3}-c^{n-3}b^{n-3}-c^{n-4}b^{n-2}$（色付き部分同士が相殺されてこれらだけが残る。）

$$=-c^{n-2}b^{n-4}-2c^{n-3}b^{n-3}-c^{n-4}b^{n-2}=-c^{n-4}b^{n-4}(c+b)^2<0$$

$$\therefore(c^{n-1}+b^{n-1})p^{n-4}-(c^{n-3}+b^{n-3})p^{n-2}<0$$

$$\therefore(c^{n-1}+b^{n-1})p^{n-4}<(c^{n-3}+b^{n-3})p^{n-2}$$

$\therefore(c^{n-1}+b^{n-1})p^{n-4}\neq(c^{n-3}+b^{n-3})p^{n-2}$　よって、矛盾。

（iii）a：奇数，b：奇数，c：偶数の場合

$a=2p+1$，$b=2q-1$，$c=2^m r$（ｒは奇数）と置くと、$a^n+b^n=c^n$より、

$$c^n=a^n+b^n=(a+b)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

$$=2(p+q)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

$$\therefore(2^m r)^n=2(p+q)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

$$\therefore 2^{mn}r^n=2(p+q)\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

ところで、$a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}$はｎ個の和と差で$a,b,n$は全て奇数より奇数が奇数個で総和は奇数である。また、$2(p+q)=2^l t$（ｔは奇数）と置くと、$2^{mn}r^n=2^l t\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$　ここで、$2^{mn}=2^l$以外の場合は左辺と右辺の偶奇が一致しないので、$2^{mn}=2^l$である。

$$\therefore r^n=t\left(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdot\cdot\cdot\cdot+b^{n-1}\right)$$

ここで、ｎ＝３の場合、$r^3=t(a^2-ab+b^2)$

ｎ＝５の場合、$r^5=t(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=t\{a^4+b^4-ab(a^2-ab+b^2)\}=t(a^4+b^4)-ab\cdot r^3$　$\therefore r^5=t(a^4+b^4)-ab\cdot r^3$

ｎ＝７の場合、$r^7=t(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)=t\{a^6+b^6-ab(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\}=t[a^6+b^6-ab\{a^4+b^4-ab(a^2+ab+b^2)\}]=t(a^6+b^6)-ab\cdot r^5$　$\therefore r^7=t(a^6+b^6)-ab\cdot r^5$

以後、同様に考えていくと、$r^n = t(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab \cdot r^{n-2}$が成り立つ。

$\therefore r^n + ab \cdot r^{n-2} = t(a^{n-1} + b^{n-1})$　$\therefore r^{n-2}(r^2 + ab) = t(a^{n-1} + b^{n-1})$

$\therefore r^2 + ab = \frac{t(a^{n-1}+b^{n-1})}{r^{n-2}}$ ———①

また、$r^n = t(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab \cdot r^{n-2}$のｎの所をｎ－２として同様の変形をすると、$r^2 + ab = \frac{t(a^{n-3}+b^{n-3})}{r^{n-4}}$ ———②

①，②より、$\frac{t(a^{n-1}+b^{n-1})}{r^{n-2}} = \frac{t(a^{n-3}+b^{n-3})}{r^{n-4}}$　$\therefore (a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} = (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2}$

ここで、この等式が正しいかどうか調べてみる。そこで、$(a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} - (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2}$として、$r^{n-2} = a^{n-3} - a^{n-4}b + a^{n-5}b^2 - \cdot\cdot\cdot\cdot - ab^{n-4} + b^{n-3}$，$r^{n-4} = a^{n-5} - a^{n-6}b + a^{n-7}b^2 - \cdot\cdot\cdot\cdot - ab^{n-6} + b^{n-5}$を代入すると、

$$(a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} - (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2}$$

$$= (a^{n-1} + b^{n-1})\left(a^{n-5} - a^{n-6}b + a^{n-7}b^2 - \cdot\cdot\cdot\cdot + a^2b^{n-7} - ab^{n-6} + b^{n-5}\right)$$

$$- (a^{n-3} + b^{n-3})\left(a^{n-3} - a^{n-4}b + c^{n-5}b^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + c^2b^{n-5} - ab^{n-4} + b^{n-3}\right)$$

$$= a^{n-1}\left(a^{n-5} - a^{n-6}b + a^{n-7}b^2 - \cdot\cdot\cdot\cdot + a^2b^{n-7} - ab^{n-6} + b^{n-5}\right)$$

$$+ b^{n-1}\left(a^{n-5} - a^{n-6}b + a^{n-7}b^2 - \cdot\cdot\cdot\cdot - ab^{n-6} + b^{n-5}\right)$$

$$-a^{n-3}\left(a^{n-3} - a^{n-4}b + a^{n-5}b^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot + a^2b^{n-5} - ab^{n-4} + b^{n-3}\right)$$

$$- b^{n-3}\left(a^{n-3} - a^{n-4}b + c^{n-5}b^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot - ab^{n-4} + b^{n-3}\right)$$

$= a^{2n-6} - a^{2n-7}b + a^{2n-8}b^2 - \cdot\cdot\cdot\cdot + a^{n+1}b^{n-7} - a^n b^{n-6} + a^{n-1}b^{n-5}$

$+a^{n-5}b^{n-1} - a^{n-6}b^n + a^{n-7}b^{n+1} - \cdot\cdot\cdot\cdot + a^2 b^{2n-8} - ab^{2n-7} + b^{2n-6}$

$-a^{2n-6} + a^{2n-7}b - a^{2n-8}b^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot - a^{n-1}b^{n-5} + a^{n-2}b^{n-4} - a^{n-3}b^{n-3}$

$-a^{n-3}b^{n-3} + a^{n-4}b^{n-2} - a^{n-5}b^{n-1} + \cdot\cdot\cdot\cdot - a^2 b^{2n-8} + ab^{2n-7} - b^{2n-6}$

$= a^{n-2}b^{n-4} - a^{n-3}b^{n-3} - a^{n-3}b^{n-3} + a^{n-4}b^{n-2}$（色付き部分同士が相殺されてこれらだけが残る。）

$= a^{n-2}b^{n-4} - 2a^{n-3}b^{n-3} + a^{n-4}b^{n-2} = a^{n-4}b^{n-4}(a-b)^2 > 0$

$$\therefore (a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} - (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2} > 0$$

$$\therefore (a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} > (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2}$$

$\therefore (a^{n-1} + b^{n-1})r^{n-4} \neq (a^{n-3} + b^{n-3})r^{n-2}$　よって、矛盾。

（ⅱ),（ⅲ）より、背理法により、$a^n + b^n = c^n$（n は奇素数）が成り立つ自然数a, b, cは存在しない。

よって、フェルマーの最終定理が初等的に示された。