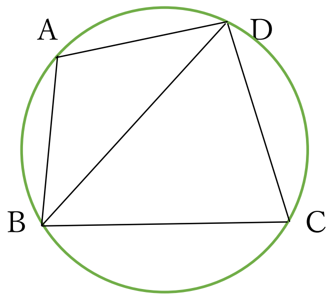

$AB = a\,, BC = b\,, CD = c\,, DA = d\,, BD = x$

と置いて、

円に内接する四角形の対角線の長さの公式を作る。△ＡＢＤでヘロンの公式を使うと、

$s = \frac{a+d+x}{2}$と置くと、$\triangle ABD = \sqrt{s(s-a)(s-d)(s-x)}$

よって、代入すると、

$$\triangle ABD = \sqrt{\left(\frac{a+d+x}{2}\right)\left(\frac{a+d+x}{2}-a\right)\left(\frac{a+d+x}{2}-d\right)\left(\frac{a+d+x}{2}-x\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+d+x}{2}\right)\left(\frac{-a+d+x}{2}\right)\left(\frac{a-d+x}{2}\right)\left(\frac{a+d-x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+d+x)(-a+d+x)(a-d+x)(a+d-x)}}{4}$$

また、$s' = \frac{b+c+x}{2}$と置くと、$\triangle CDB = \sqrt{s'(s'-b)(s'-c)(s'-x)}$

よって、代入すると、

$$\triangle CDB = \sqrt{\left(\frac{b+c+x}{2}\right)\left(\frac{b+c+x}{2}-b\right)\left(\frac{b+c+x}{2}-c\right)\left(\frac{b+c+x}{2}-x\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b+c+x}{2}\right)\left(\frac{-b+c+x}{2}\right)\left(\frac{b-c+x}{2}\right)\left(\frac{b+c-x}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{(b+c+x)(-b+c+x)(b-c+x)(b+c-x)}}{4}$$

ところで、四角形 ABCD は円に内接する四角形より∠A と∠C は補角をなしている。

（∠A＋∠C＝１８０°）よって、１つの角が補角をなしている三角形の面積比の公式

より、△ABD：△CDB＝AB×AD：CB×CD＝$ad:bc$　$\therefore ad \triangle CDB = bc \triangle ABD$　$\therefore$

$$ad\sqrt{(b+c+x)(-b+c+x)(b-c+x)(b+c-x)} = bc\sqrt{(a+d+x)(-a+d+x)(a-d+x)(a+d-x)}$$

この両辺を２乗すると、$a^2d^2(b+c+x)(-b+c+x)(b-c+x)(b+c-x) = b^2c^2(a+d+x)(-a+d+x)(a-d+x)(a+d-x)$　これを展開すると、

$$a^2d^2\{x^2+2cx-(b+c)(b-c)\}\{-x^2+2cx+(b-c)(b+c)\} = b^2c^2\{x^2+2dx-(a+d)(a-d)\}\{-x^2+2dx+(a-d)(a+d)\}$$

$\therefore$　$a^2d^2\{-x^4+2cx^3+(b^2-c^2)x^2-2cx^3+4c^2x^2+2c(b^2-c^2)x+(b^2-c^2)x^2-2c(b^2-c^2)x-(b^2-c^2)^2\} = b^2c^2\{-x^4+2dx^3+(a^2-d^2)x^2-2dx^3+4d^2x^2+2d(a^2-d^2)x+(a^2-d^2)x^2-2d(a^2-d^2)x-(a^2-d^2)^2\}$

$\therefore a^2d^2\{-x^4+(2b^2+2c^2)x^2-(b^4-2b^2c^2+c^4)\} = b^2c^2\{-x^4+(2a^2+2d^2)x^2-(a^4-2a^2d^2+d^4)\}$

$\therefore$　$(a^2d^2-b^2c^2)x^4+2(a^2b^2c^2+b^2c^2d^2-a^2b^2d^2-a^2c^2d^2)x^2-a^4b^2c^2-b^2c^2d^4+a^2b^4d^2+a^2c^4d^2=0$

これを解の公式で解くと、

$$x^2 = \frac{-(a^2b^2c^2+b^2c^2d^2-a^2b^2d^2-a^2c^2d^2) \pm \sqrt{X}}{a^2d^2-b^2c^2}$$

$$
\begin{aligned}
X = &(a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 - a^2b^2d^2 - a^2c^2d^2)^2 \\
&- (a^2d^2 - b^2c^2)(-a^4b^2c^2 - b^2c^2d^4 + a^2b^4d^2 + a^2c^4d^2) \\
&= \{b^2c^2(a^2 + d^2) - a^2d^2(b^2 + c^2)\}^2 \\
&- (-a^6b^2c^2d^2 - a^2b^2c^2d^6 + a^4b^4d^4 + a^4c^4d^4 + a^4b^4c^4 + b^4c^4d^4 \\
&- a^2b^6c^2d^2 - a^2b^2c^6d^2) \\
&= b^4c^4(a^4 + 2a^2d^2 + d^4) - 2a^2b^2c^2d^2(a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \\
&+ a^4d^4(b^4 + 2b^2c^2 + c^4) + a^6b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2d^6 - a^4b^4d^4 - a^4c^4d^4 \\
&- a^4b^4c^4 - b^4c^4d^4 + a^2b^6c^2d^2 + a^2b^2c^6d^2 \\
&= a^4b^4c^4 + 2a^2b^4c^4d^2 + b^4c^4d^4 \\
&- 2a^2b^2c^2d^2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) + a^4b^4d^4 + 2a^4b^2c^2d^4 \\
&+ a^4c^4d^4 + a^6b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2d^6 - a^4b^4d^4 - a^4c^4d^4 - a^4b^4c^4 - b^4c^4d^4 \\
&+ a^2b^6c^2d^2 + a^2b^2c^6d^2 \\
&= 2a^2b^4c^4d^2 - 2a^2b^2c^2d^2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2) + 2a^4b^2c^2d^4 \\
&+ a^6b^2c^2d^2 + a^2b^2c^2d^6 + a^2b^6c^2d^2 + a^2b^2c^6d^2 \\
&= a^2b^2c^2d^2(2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2d^2 - 2c^2d^2 + 2a^2d^2 + a^4 + d^4 \\
&+ b^4 + c^4) \\
&= a^2b^2c^2d^2\{(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(b^2c^2 - a^2c^2 - b^2d^2 + a^2d^2)\} \\
&= a^2b^2c^2d^2[(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2\{-a^2(c^2 - d^2) + b^2(c^2 - d^2)\}] \\
&= a^2b^2c^2d^2\{(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 - 2(a^2 - b^2)(c^2 - d^2)\} \\
&= a^2b^2c^2d^2\{(a^2 - b^2) - (c^2 - d^2)\}^2 = a^2b^2c^2d^2(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2
\end{aligned}
$$

$$
x^2 = \frac{-(a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 - a^2b^2d^2 - a^2c^2d^2) \pm \sqrt{a^2b^2c^2d^2(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)^2}}{a^2d^2 - b^2c^2}
$$

$$
= \frac{-(a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 - a^2b^2d^2 - a^2c^2d^2) \pm abcd(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)}{(ad - bc)(ad + bc)}
$$

（ｉ）±の符号が＋の場合、分子＝$-(a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 - a^2b^2d^2 - a^2c^2d^2) + abcd(a^2 - b^2 - c^2 + d^2) = -a^2b^2c^2 - b^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^3bcd - ab^3cd - abc^3d + abcd^3 = -bc(a^2bc + bcd^2) + ad(ab^2d + ac^2d + a^2bc - b^3c - bc^3 + bcd^2) = -bc(a^2bc + bcd^2) + ad(a^2bc + bcd^2) + ad(ab^2d + ac^2d - b^3c - bc^3) = (ad - bc)(a^2bc + bcd^2) + ad\{ad(b^2 + c^2) - bc(b^2 + c^2)\} = bc(ad - bc)(a^2 + d^2) + ad(ad - bc)(b^2 + c^2) = (ad - bc)\{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)\} = (ad - bc)\{bca^2 + d(b^2 + c^2)a + bcd^2\} = (ad - bc)(ba + cd)(ca + bd) = (ad - bc)(ab + cd)(ac + bd)$

$$
\therefore x^2 = \frac{(ad-bc)(ab+cd)(ac+bd)}{(ad-bc)(ad+bc)} = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}
$$

$$\therefore x=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}}$$

（ⅱ）±の符号が－の場合、分子＝$-(a^2b^2c^2+b^2c^2d^2-a^2b^2d^2-a^2c^2d^2)-abcd(a^2-b^2-c^2+d^2)=-a^2b^2c^2-b^2c^2d^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2-a^3bcd+ab^3cd+abc^3d-abcd^3=-bc(a^2bc+bcd^2)+ad(ab^2d+ac^2d-a^2bc+b^3c+bc^3-bcd^2)=-bc(a^2bc+bcd^2)-ad(a^2bc+bcd^2)+ad(ab^2d+ac^2d+b^3c+bc^3)=-(ad+bc)(a^2bc+bcd^2)+ad\{ad(b^2+c^2)+bc(b^2+c^2)\}=-bc(ad+bc)(a^2+d^2)+ad(ad+bc)(b^2+c^2)=-(ad+bc)\{bc(a^2+d^2)+ad(b^2+c^2)\}=-(ad+bc)\{bca^2+d(b^2+c^2)a+bcd^2\}=-(ad+bc)(ba+cd)(ca+bd)=-(ad+bc)(ab+cd)(ac+bd)$

$\therefore x^2=\frac{-(ad+bc)(ab+cd)(ac+bd)}{(ad-bc)(ad+bc)}=\frac{-(ab+cd)(ac+bd)}{(ad-bc)}$　よって、不適。

（ⅰ），（ⅱ）より、$BD=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{(ad+bc)}}$