

§ 1. 自然数から整数へ

どのように数学が苦手であると思っている人でも、おそらく自然数について知らない人はあるまい。

1, 2, 3, 4, ...

それは1をつぎつぎに加えていった数であり、しかも限りなく大きくなり得る、ということである。この自然数は人類の数学的思考のはじまりであった。自然数にはさまざまな名前がつけられ、そのために2進法, 5進法, 10進法などが工夫され、それは人類の言語文化の重要な部分をなしてきた。

ここでは、そのようなことをひとまず棚上げにして、自然数の本来の姿にかえって、そこから再出発してみよう。自然数とは何か、とくに自然数全体の集合 N とは何か、それについてはつぎのような条件を考える。これを**ペアノの公理**と名づける。

1. N は1を含む

ここでいう1とは、単なる名称にすぎない。だから、それは1と名づけられたあるもの、というだけの意味である。

2. N の各要素 a に対しては N のただ1つの要素 $\phi(a)$ が対応し、これを a の後続者と名づける。 $\phi(a)$ を a^+ と書くことにする。

3. 1は他のいかなる要素の後続者（後者ともいう）にもならない。

4. $a^+ = b^+$ ならば $a = b$

以上のことをまとめると N のなかには1対1写像 $\phi(a)$ が存在し、 $\phi(a) = 1$ となる a は存在しないということである。

5. N のなかに1を含み、 a とともに $\phi(a)$ を含む集合が含まれていたら、それは N と一致する。

これは数学的帰納法の原理でもある。それは a を含んだある命題が $a = 1$ に対して正しく、また a に対して正しければ a^+ にも正しいとすると、それはすべての N の要素に対して正しい、ということである。

N が以上の1, 2, 3, 4, 5の条件を満足すればそれはわれわれの知っている自然数の集合と一致することがわかる。そのためには自然数についてのいろいろの知識は一切必要でない。

ここで、1つの例をあげよう。

ある人々の集団があって、会合を催したとしよう。そのとき、すべての人々が1回だけ何かをしゃべることになった。そのときしゃべる順序はあらかじめ定めなくて、いちどしゃべった人がつぎの人を指名していくことにした。

誰でも1回しゃべるとつぎの人を指名する権利を得たものと定める。そしてある人が皮切りにしゃべった。この人だけは指名を受けてしゃべったのではなかった。ただ始める人がいないと会は始まらないからである。

このようにつぎつぎに指名していったらすべての人がしゃべり終ったのである。

このとき a が指名した人、 a^+ がペアノの公理における“後続者”に相当するつぎの人である。ここで注意しておきたいことは 1, 2, 3, ... という数は 1 つも表面にはでてこないですんだということである。

この 5 つの公理を手がかりにしてこれまで知られている自然数のすべての性質を導き出すことができるのである。

和 N の任意の 2 要素 x, y に対して

(1) x^+ を $x + 1$ と定義する。

(2) $(x + y)^+$ を $x + y^+$ と定める。

まず結合法則 $(x + y) + z = x + (y + z)$ を証明しよう。

$z = 1$ のときは

$$(x + y) + 1 = (x + y)^+$$

$$x + (y + 1) = x + y^+$$

したがって (2) によって

$$(x + y) + 1 = x + (y + 1)$$

つぎに $(x + y) + z = x + (y + z)$ は正しいとして、 z^+ に対しても正しいことを証明しよう。

$$\begin{aligned} (x + y) + z^+ &= \{(x + y) + z\}^+ \\ &= \{x + (y + z)\}^+ \\ &= x + (y + z)^+ \\ &= x + (y + z^+) \end{aligned}$$

したがって z^+ に対しても正しい。だから 5 によってすべての N に属する z に対して正しい。

交換法則 $x + y = y + x$ については：

まず $x = 1$ とすべての y について成り立つことを証明しよう。

$y = 1$ のときは $1 + 1 = 1 + 1$ で正しい。

y に対して正しかったら

$$1 + y = y + 1$$

$$(1 + y)^+ = 1 + y^+$$

$$(y + 1)^+ = y + 1^+ = y + (1 + 1)$$

(結合法則が成り立つから)

$$= (y + 1) + 1 = y^+ + 1$$

すなわち y^+ に対しても成り立つことがわかった。だから 5 によってすべての y に対して成り立つことが結論できる。

つぎに x について成り立つとしよう。

$$x + y = y + x$$

+をとると

$$(y+x)^+ = y+x^+$$

$$(x+y)^+ = x+y^+ = x+(y+1)$$

$$(1+y = y+1 \text{ は証明済みだから})$$

$$= x+(1+y)$$

$$(\text{結合法則により})$$

$$= (x+1)+y = x^++y$$

すなわち x^+ に対しても成り立つことがわかった。

だから5によってすべての x に対して成り立つことがわかった。

この交換法則の証明は結合法則より困難であったのはなぜか。結合法則の場合、加法の定義 $(x+y)^+ = x+y^+$ が $(x+y)+1 = x+(y+1)$ となって $z=1$ のときの結合法則そのものだからやさしい。しかし交換法則のむずかしいのはペアノの公理のもつ性格そのものからきている。元来ペアノの公理は1からつぎつぎに後続者をつくっていくのだから、それは順序数的な考え方である。順序数と考えると、小学校の算数でも $5+3=3+5$ となることの説明はむずかしいのである。

消去法則： $x+z = y+z$ のとき $x=y$ となる。

まず $z=1$ のときは

$$x+1 = x^+$$

$$y+1 = y^+$$

$x^+ = y^+$ ならば4によって

$$x = y$$

z に対して成り立つと仮定して z^+ についても成り立つことを証明しよう。

$$x+z^+ = (x+z)^+$$

$$y+z^+ = (y+z)^+$$

$x+z^+ = y+z^+$ ならば

$$(x+z)^+ = (y+z)^+$$

4によって

$$x+z = y+z$$

仮定によって

$$x = y$$

だからすべての z に対して成り立つ。また $z+x = z+y$ ならば加法の交換法則によって、 $x+z = y+z$ したがって $x=y$

積 $x \cdot y$ はつぎのように定義する。

$$x \cdot 1 = x$$

$$x \cdot y^+ = xy + y$$

分配法則 $(x + y)z = xz + yz$ を証明しよう。

$z = 1$ のときは

$$(x + y) \cdot 1 = x + y = x \cdot 1 + y \cdot 1$$

となり正しいことがわかる。

つぎに z について正しいと仮定して、 z^+ に対して正しいことを証明しよう。

$$(x + y)z^+ = (x + y)z + (x + y)$$

(z に対して正しいから)

$$= (xz + yz) + (x + y)$$

(加法の結合法則と交換法則によって)

$$= (xz + x) + (yz + y) = x \cdot z^+ + yz^+$$

すなわち、 z^+ に対しても正しい。

交換法則: $xy = yx$

まず $y = 1$ に対して $x \cdot 1 = 1 \cdot x$ を証明しよう。

$x = 1$ のときは $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$ で正しい。

x に対して正しいとすれば x^+ については、

$$1 \cdot x^+ = 1 \cdot x + 1 = x \cdot 1 + 1 = x + 1$$

$$= x^+ = x^+ \cdot 1$$

したがって、すべての x に対して $1 \cdot x = x \cdot 1$ が成立する。

y に対して $x \cdot y = y \cdot x$ が成り立つと仮定しよう。

$$y^+ = (y + 1)x$$

(分配法則によって)

$$= y \cdot x + x = x \cdot y + x = xy^+$$

したがってすべての y に対して成り立つ。

交換法則が成り立つから

$$x(y + z) = (y + z)x = yx + zx = xy + xz$$

したがって、 $x(y + z) = xy + xz$ も成り立つ。

結合法則: $(xy)z = x(yz)$

$z = 1$ のときは

$$(xy) \cdot 1 = xy = x(y \cdot 1)$$

で成り立つ。 z に対して成り立つとすれば、 z^+ に対しては

$$(xy)z^+ = (xy)z + xy = x(yz) + xy$$

(分配法則によって)

$$= x(yz + y) = x(yz^+)$$

したがって、すべての z に対して成り立つ。