

§ 2. 整数の構成

自然数 N の諸法則が証明されて、その構造が明らかになったので、これを整数 Z まで拡張してみよう。そのさい、0 および負数はこれまでは数直線を左に延長する等の手段によって説明されてきた。

しかし、ここではあくまで N の範囲内だけで、換言すれば N の要素だけを使って、 Z を組立ててみることにしよう。つまり N から Z を構成するのである。

まず N の 2 つの要素 a, b の組 $[a, b]$ を考える。つまりこれは N の要素を成分とする 2 次元のベクトルと考えてもよい。このようなベクトル全体の集合を N^2 で表わす。

この N^2 のなかにつぎのような 2 項関係を導入する。

N^2 の 2 つの要素 $[a, b], [c, d]$ は

$$a + d = b + c$$

のとき、

$$[a, b] \sim [c, d]$$

と定義する。

まずこの 2 項関係は同値律を満足することを証明しよう。

反射律： $a + b = b + a$ だから、

$$[a, b] \sim [a, b]$$

対称律： $[a, b] \sim [c, d]$ ならば $a + d = b + c$

したがって

$$b + c = a + d, \quad c + b = d + a$$

だから

$$[c, d] \sim [a, b]$$

推移律： $[a, b] \sim [c, d], [c, d] \sim [e, f]$ なら

$$a + d = b + c$$

両辺に f を加えると

$$a + d + f = b + c + f$$

$$([c, d] \sim [e, f] \text{ だから } c + f = d + e)$$

$$= b + d + e$$

したがって

$$(a + f) + d = (b + e) + d$$

加法の消去法によって

$$a + f = b + e$$

だから

$$[a, b] \sim [e, f]$$

以上で反射的、対称的、推移的という同値が成り立つことがわかったので N^2 は同値の要素の類に分かれることがわかった。

ここでその N^2 に加法を導入してみよう。

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

と定義する。ここで

$$[a, b] \sim [a', b']$$

$$[c, d] \sim [c', d']$$

のとき

$$[a, b] + [c, d] \sim [a', b'] + [c', d']$$

となることを証明しよう。そのためには

$$[a + c, b + d] \sim [a' + c', b' + d']$$

を証明すればよい。

$$(a + c) + (b' + d') = (a + b') + (c + d')$$

$$([a, b] \sim [a', b'] \text{ だから } a + b' = a' + b)$$

$$[c, d] \sim [c', d'] \text{ だから } c + d' = c' + d$$

となる。これを代入すると、

$$= (a' + b) + (c' + d) = (a' + c') + (b + d)$$

だから

$$[a + c, b + d] \sim [a' + c', b' + d']$$

$$[a, b] + [c, d] \sim [a', b'] + [c', d']$$

したがって、加法において同じ類のもので置き換えても和の属する類は同じになる。

ここで加法の諸法則を確かめていこう。

交換法則：

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

$$= [c + a, d + b]$$

$$= [c, d] + [a, b]$$

結合法則：

$$[[a, b] + [c, d]] + [e, f]$$

$$= [a + c, b + d] + [e, f]$$

$$= [[a + c] + e, [b + d] + f]$$

$$= [a + [c + e], b + [d + f]]$$

$$= [a, b] + [c + e, d + f]$$

$$= [a, b] + [[c, d] + [e, f]]$$