# フェルマーの最終定理の初等的証明

壊れた扉（完成者)
愛犬ベルのために (基案者)

最新 2021 年 10 月 27 日

## 更新履歴

初版 2021 年 10 月 27 日

## はじめに

[*1]フェルマーの最終定理は $n = 3, 4$ の場合などが初等的に証明されていて、例えば、$n = 15$ の場合などは、$(a^5)^3 + (b^5)^3 = (c^5)^3$ などとすれば成り立たない事は自明なので、あとは $n$ が奇素数の場合のみ考えれば良い。

そこで、$a^n + b^n = c^n \quad$ ($n$ は奇素数) となる自然数 $a, b, c$ が存在すると仮定すると、

i. a：偶数，b：偶数，c：偶数
ii. a：偶数，b：奇数，c：奇数
iii. a：奇数，b：奇数，c：偶数

の 3 通りの場合があり、i. の場合は両辺を 2 で割り続ければ ii. か iii. の場合に帰着する. よって、ii.、iii. の場合を示せば良い。

## 1　a：偶数，b：奇数，c：奇数の場合

$a = 2p, b = 2q + 1, c = 2r + 1 \quad$ ($p, q, r$ は自然数) と置いて $a^n + b^n = c^n$ に代入すると、

$$(2p)^n + (2q + 1)^n = (2r + 1)^n$$

$$(2p)^n = (2r + 1)^n - (2q + 1)^n$$

[*1] フェルマーの最終定理を初等的証明で解いて見ました。基本案は愛犬ベルのためにですが、大幅に改定して下さったのが壊れた扉さんです。

これを二項定理で展開すると、

$$2^n p^n = (2r)^n +_n C_1(2r)^{n-1} +_n C_2(2r)^{n-2} + \cdots +_n C_{n-2}(2r)^2 +_n C_1(2r) + 1$$
$$-\{(2q)^n +_n C_1(2q)^{n-1} +_n C_2(2q)^{n-2} + \cdots +_n C_{n-2}(2q)^2 +_n C_1(2q) + 1\}$$

$$= 2^n(r^n - q^n) +_n C_1 2^{n-1}\{r^{n-1} - q^{n-1}\} +_n C_2 2^{n-2}\{r^{n-2} - q^{n-2}\} + \cdots$$
$$+_n C_{n-2} 2^2(r^2 - q^2) +_n C_{n-1} 2(r - q)$$

公式

$$a^n - b^n = (a - b)\{a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\}$$

を考えれば、この右辺は $2(r-q)$ で割り切れるので、左辺も $2(r-q)$ で割り切れ、左辺は偶数である。

ところが、$n$ は奇素数 ${}_nC_{n-1} = n$ より右辺は 偶数 + 奇数 となり奇数である。よって、矛盾が生じる。

## 2　a：奇数，b：奇数，c：偶数の場合

$a = 2p+1, b = 2q-1, c = 2r$　$(p, q, r$ は自然数$)$ として、$a^n + b^n = c^n$ に代入すると、

$$(2p+1)^n + (2q-1)^n = (2r)^n$$

これを二項定理で展開すると、

$$2^n r^n = (2p)^n +_n C_1(2p)^{n-1} +_n C_2(2p)^{n-2} + \cdots +_n C_{n-2}(2p)^2 +_n C_1(2p) + 1$$
$$+\{(2q)^n +_n C_1(2q)^{n-1}(-1) +_n C_2(2q)^{n-2}(-1)^2 + \cdots +_n C_2(2q)^2(-1)^{n-2} +_n C_1(2q)(-1)^{n-1} + (-1)^n\}$$

$n$ は奇数より $1^n$ と $(-1)^n$ は相殺されて 0 になるので、

$$= 2^n(p^n + q^n) +_n C_1 2^{n-1}\{p^{n-1} - q^{n-1}\} +_n C_2 2^{n-2}\{p^{n-2} + q^{n-2}\} + \cdots +$$
$${}_nC_{n-2} 2^2(p^2 - q^2) +_n C_{n-1} 2(p + q)$$

$\therefore$

$$2^n r^n = 2^n(p^n + q^n) +_n C_1 2^{n-1}\{p^{n-1} - q^{n-1}\} +_n C_2 2^{n-2}\{p^{n-2} + q^{n-2}\} + \cdots +$$
$${}_nC_{n-2} 2^2(p^2 - q^2) +_n C_{n-1} 2(p + q) \text{———}☆$$

ところで、$n$ が奇数の時、公式

$$a^n + b^n = (a + b)\{a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}\}$$

また、$n$ が偶数の時、公式

$$a^n - b^n = (a + b)\{a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - b^{n-1}\}$$

を利用すると、$n$ は奇素数より☆の右辺は $2(p+q)$ で割り切れるので、☆の左辺も $p+q$ で割り切れ、左辺は偶数となる。

ところが、$n$ が奇素数 ${}_nC_{n-1}=n$ より☆の右辺は 偶数＋奇数 となり奇数となる。 よって、矛盾が生じる。

よって、背理法により、$a^n+b^n=c^n$ は成り立たない。よって、フェルマーの最終定理が初等的に示された。