フェルマーの最終定理の証明

愛犬ベルのために

最新 2021 年 3 月 17 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議世界」で、中年 A 様と議論しながら、完成したものです。オイラーとは違った手法で、構成されています。なお、連立方程式の解法に数式処理ソフト maxima を使いました。

更新履歴

2021.3.12　新規作成

2021.3.13　修正

2021.3.15　修正

2021.3.16　修正

2021.3.17　修正

1　フェルマーの最終定理　n=3 の場合

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=c^3$　ただし a,b,c は自然数で互いに素であるとする。(1)

この (1) において、$c=xy$(ただし x,y は自然数) とし、

- $a+b=1 \quad a^2-ab+b^2=x^3y^3$
- $a+b=x^3y^3 \quad a^2-ab+b^2=1$
- $a+b=xy \quad a^2-ab+b^2=x^2y^2$
- $a+b=x^2y \quad a^2-ab+b^2=xy^2$
- $a+b=x^2y^2 \quad a^2-ab+b^2=xy$
- $a+b=x^2y^3 \quad a^2-ab+b^2=x$
- $a+b=xy^3 \quad a^2-ab+b^2=x^2$
- $a+b=x \quad a^2-ab+b^2=x^2y^3$

- $a+b=x^2 \quad a^2-ab+b^2=xy^3$
- $a+b=x^3 \quad a^2-ab+b^2=y^3$

について、検討するものである。x, y の入れ替えても内容的に同じものは除いてある。背理法をもちいる。(1) が成り立つものとする。

1.1 $a+b=1 \quad a^2-ab+b^2=x^3y^3$ の場合

$a+b=1$ は、a, b は自然数より、ありえない。よって、(1) は、成り立たない。

1.2 $a+b=x^3y^3 \quad a^2-ab+b^2=1$ の場合

$$a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab$$

ここで、a, b は自然数より、

$$a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab \geqq 1$$

よって、$a^2-ab+b^2=1$ は、等号が成り立つときであり、$a=b=1$ このとき、(1) は、成り立たない。

1.3 $a+b=xy \quad a^2-ab+b^2=x^2y^2$ の場合

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=x^2y^2$$

また、

$$a^2-ab+b^2=x^2y^2$$

より、これら 2 つの式を引いて、

$$3ab=0$$

よって、a, b のいずれかが 0 であるが、a, b は自然数により、矛盾。故に、(1) は、成り立たない。

1.4 $a+b=x^2y \quad a^2-ab+b^2=xy^2$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a+b=x^2y \\ a^2-ab+b^2=xy^2 \end{cases} \tag{2}$$

を解くと、

$$a=\frac{3x^2y-\sqrt{3xy^2(4-x^3)}}{6}, b=\frac{3x^2y+\sqrt{3xy^2(4-x^3)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y + \sqrt{3xy^2(4-x^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y - \sqrt{3xy^2(4-x^3)}}{6}$$

これより、$4 - x^3 \geqq 0$ でなければならない。x, y は自然数なので、$x = 1$ である。

$$\begin{cases} a + b = y \\ a^2 - ab + b^2 = y^2 \end{cases} \tag{3}$$

これより、

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = y^2$$

また、

$$a^2 - ab + b^2 = y^2$$

これら 2 つの式を引いて、

$$3ab = 0$$

したがって、a, b のいずれかは、0 である。しかしながら、a, b は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.5 $a + b = x^2y^2 \quad a^2 - ab + b^2 = xy$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y^2 \\ a^2 - ab + b^2 = xy \end{cases} \tag{4}$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y^2 - \sqrt{3xy(4-x^3y^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y^2 + \sqrt{3xy(4-x^3y^3)}}{6}$$

$$a = \frac{3x^2y^2 + \sqrt{3xy(4-x^3y^3)}}{6}, b = \frac{3x^2y^2 - \sqrt{3xy(4-x^3y^3)}}{6}$$

これより、$4 - x^3y^3 \geqq 0$ でなければならない。x, y は自然数なので、$x = y = 1$ である。ゆえに、

$$a^3 + b^3 = x^3y^3 = 1$$

ここで、a, b, x, y は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.6 $a + b = x^2y^3 \quad a^2 - ab + b^2 = x$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a + b = x^2y^3 \\ a^2 - ab + b^2 = x \end{cases} \tag{5}$$

を解くと、

$$a = \frac{3x^2y^3 - \sqrt{3x(4-x^3y^6)}}{6}, b = \frac{3x^2y^3 + \sqrt{3x(4-x^3y^6)}}{6}$$

$$a=\frac{3x^2y^3+\sqrt{3x(4-x^3y^6)}}{6}, b=\frac{3x^2y^3-\sqrt{3x(4-x^3y^6)}}{6}$$

これより、$4-x^3y^6 \geqq 0$ でなければならない。x, y は自然数なので、$x=y=1$ である。ゆえに、

$$a^3+b^3=x^3y^3=1$$

ここで、a, b, x, y は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.7 $a+b=xy^3 \quad a^2-ab+b^2=x^2$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a+b=xy^3 \\ a^2-ab+b^2=x^2 \end{cases} \tag{6}$$

を解くと、

$$a=\frac{3xy^3-\sqrt{3x^2(4-y^6)}}{6}, b=\frac{3xy^3+\sqrt{3x^2(4-y^6)}}{6}$$
$$a=\frac{3xy^3+\sqrt{3x^2(4-y^6)}}{6}, b=\frac{3xy^3-\sqrt{3x^2(4-y^6)}}{6}$$

これより、$4-y^6 \geqq 0$ でなければならない。x, y は自然数なので、$y=1$ である。

$$\begin{cases} a+b=x \\ a^2-ab+b^2=x^2 \end{cases} \tag{7}$$

これより、

$$(a+b)^2=a^2+ab+b^2=x^2$$

また、

$$a^2-ab+b^2=x^2$$

これら 2 つの式の引いて

$$3ab=0$$

したがって、a, b のいずれかは、0 である。しかしながら、a, b は自然数。矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.8 $a+b=x \quad a^2-ab+b^2=x^2y^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a+b=x \\ a^2-ab+b^2=x^2y^3 \end{cases} \tag{8}$$

より、

$$a^2-ab+b^2=(a+b)^2-3ab$$

$$x^2y^3 = x^2 - 3ab$$
$$x^2(1-y^3) = 3ab$$

ここで、a, b, x, y は自然数。ゆえに、

$$1 - y^3 > 0$$

矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.9 $a+b=x^2 \quad a^2-ab+b^2=xy^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a+b=x^2 \\ a^2-ab+b^2=xy^3 \end{cases} \tag{9}$$

さて、

$$a+b=x^2$$
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = x^4$$

また、

$$a^2-ab+b^2=xy^3$$

この 2 つを引いて、

$$3ab = x^4 - xy^3$$
$$3ab = x(x^3-y^3)$$
$$3ab = x(x-y)\{x^2+xy+y^2\}$$
$$3ab = x(x-y)\{(x-y)^2+3xy\}$$

1.9.1 $x-y=3m$(m は整数) の場合

$$3ab = x \cdot 3m\{(3m)^2+3xy\}$$
$$3ab = x \cdot 3m\{(3m)^2+3xy\} = x \cdot 3m(9m^2+3xy) = x \cdot 9m(3m^2+xy)$$
$$3ab = 9xm(3m^2+xy)$$
$$ab = 3xm(3m^2+xy)$$

よって、a, b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数である。―――☆
また、$a=3p+1$,$b=3q+2$(p, q は整数)として、$a^3+b^3=c^3$ に代入すると、

$$(3p+1)^3+(3q+2)^3 = 27p^3+27p^2+9p+1+27q^3+54q^2+36q+8$$
$$= 27p^3+27q^3+27p^2+54q^2+9p+36q+9$$

よって、c を 3 の倍数にすれば成り立つ場合がある。よって、a, b のうち少なくとも 1 つが 3 の倍数とは限らない。―――☆☆

☆,☆☆より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.9.2 $x-y=3m+1$(m は整数) の場合

$$3ab=x(3m+1)\{(3m+1)^2+3xy\}$$

$$3ab=x(3m+1)\{(3m+1)^2+3xy\}=x(3m+1)(9m^2+6m+3xy+1)$$

右辺は、$3m+1$ は 3 で割ると 1 余る数と、$(3m+1)^2+3xy$ は 3 で割ると 1 余る数との積で、左辺は 3 の倍数より、x が 3 の倍数である。

x が 3 の倍数なので、$c=xy$ より、c も 3 の倍数。すると、a,b は、3 で割ると 1 余る数と、3 で割ると 2 余る数である。

よって、左辺の a と b に 3 の因子がないので、右辺の 3 の倍数の x は、$x=3$ である。また、左辺が互いに素な 3 つの数の積より、右辺も 3 つの互いの素な数の積である。

つまり、$3m+1$ と $(3m+1)^2+3xy$ は左辺の a と b と同じ 3 で割ると 1 余る数と 3 で割ると 2 余る数の組み合わせである。

ところが、$3m+1$ は 3 で割ると 1 余る数で、$(3m+1)^2+3xy$ も 3 で割ると 1 余る数より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.9.3 $x-y=3m+2$(m は整数) の場合

$$3ab=x(3m+2)\{(3m+2)^2+3xy\}$$

$$3ab=x(3m+2)\{(3m+2)^2+3xy\}=x(3m+2)(9m^2+12m+3+3xy+1)$$

左辺が 3 の倍数より右辺も 3 の倍数で、$3m+2$ は 3 で割ると 2 余る数と、$(3m+2)^2+3xy$ は 3 で割ると 1 余る数なので、両方とも、3 の倍数ではないので、x が 3 の倍数。また、a と b は互いに素。

x が 3 の倍数なので、$c=xy$ より、より c も 3 の倍数なので、a と b は 3 で割ると 1 余る数と 3 で割ると 2 余る数の組み合わせとなる。

よって、3 と a と b は互いに素である。左辺が互いに素な 3 数の積より、右辺も互いに素な 3 数の積である。

したがって、$x=3,\ ab=x(3m+2)\{(3m+2)^2+3xy\}$

$x=3$ から、$a+b=x^2$ に代入すると、$a+b=9$ より、$(a,b)=(1,8),(2,7),(3,6),(4,5)$ である。

$a^3+b^3=c^3$ に代入して、$1^3+8^3=513=3^3\times 19$ よって、成り立たない。
$2^3+7^3=351=3^3\times 13$ よって、成り立たない。
$3^3+6^3=243=3^5$ よって、成り立たない。
$4^3+5^3=189=3^3\times 7$ よって、成り立たない。
よって、(1) は、成り立たない。

1.10 $a+b=x^3 \quad a^2-ab+b^2=y^3$ の場合

連立方程式

$$\begin{cases} a+b=x^3 \\ a^2-ab+b^2=y^3 \end{cases} \tag{10}$$

さて、

$$a+b=x^3$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=x^6$$

また、

$$a^2-ab+b^2=y^3$$

この 2 つを引いて、

$$3ab=x^6-y^3$$

$$3ab=(x^2)^3-y^3$$

$$3ab=(x^2-y)\{(x^2)^2+x^2y+y^2\}$$

$$3ab=(x^2-y)\{(x^2-y)^2+3x^2y\}$$

1.10.1 $x^2-y=3m(m$ は整数$)$ の場合

$$3ab=3m\{(3m)^2+3x^2y\}$$

$$3ab=3m\{(3m)^2+3x^2y\}=3m(9m^2+3x^2y)=9m(3m^2+x^2y)$$

$$3ab=9m(3m^2+x^2y)$$

$$ab=3m(3m^2+x^2y)$$

よって、a,b のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数である。―――☆
また、$a=3p+1$,$b=3q+2$（p,q は整数）として、$a^3+b^3=c^3$ に代入すると、

$$(3p+1)^3+(3q+2)^3=27p^3+27p^2+9p+1+27q^3+54q^2+36q+8$$

$$=27p^3+27q^3+27p^2+54q^2+9p+36q+9$$

よって、c を 3 の倍数にすれば成り立つ場合がある。よって、a,b のうち少なくとも 1 つが 3 の倍数とは限らない。―――☆☆
☆，☆☆より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.10.2　$x^2 - y = 3m + 1$(m は整数) **の場合**

$$3ab = (3m+1)\{(3m+1)^2 + 3x^2y\}$$

$$3ab = (3m+1)\{(3m+1)^2 + 3x^2y\} = (3m+1)(9m^2 + 6m + 3x^2y + 1)$$

よって、右辺は 3 で割ると 1 余る数と 3 で割ると 1 余る数の積より、3 で割ると 1 余る。ところが、左辺は 3 の倍数より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

1.10.3　$x^2 - y = 3m + 2$(m は整数) **の場合**

$$3ab = (3m+2)\{(3m+2)^2 + 3x^2y\}$$

$$3ab = (3m+2)\{(3m+2)^2 + 3x^2y\} = (3m+2)(9m^2 + 12m + 3 + 3x^2y + 1)$$

よって、右辺は 3 で割ると 2 余る数と 3 で割ると 1 余る数の積より、3 で割ると 2 余る。ところが、左辺は 3 の倍数より矛盾。よって、(1) は、成り立たない。

よって、$n = 3$ のときのフェルマーの最終定理が証明された。