

数学検定の問題の中には、極めて重要な命題を含んでいるものがある。それをいくつか上げてみる。

1 その1

連続する正の数からその一部の連続するいくつかの数を足したら総和が1000になった。この数の組をもとめよ。

というような問題が数学検定準1級(2次)にあった。

1.1 解答案

自然数の1からnまでの和は

$$\frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

である。そこからa進んだ数の1からの和は

$$\frac{(n+a)\{(n+a)+1\}}{2} \quad (2)$$

であるから、連続するいくつかの数の組みの総和Sは

$$\frac{(n+a)\{(n+a)+1\}}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = S \quad (3)$$

より、

$$(n+a)\{(n+a)+1\} - n(n+1) = 2S$$

$$(n+a)^2 + (n+a) - n^2 - n = 2S$$

$$n^2 + 2an + a^2 + n + a - n^2 - n = 2S$$

$$2an + a^2 + a = 2S$$

$$a^2 + 2an + a = 2S$$

そこで、

$$\frac{a^2 + 2an + a}{a} = \frac{2S}{a}$$

$$a + 2n + 1 = \frac{2S}{a}$$

左辺は整数だから $S = ap$ とおける。

$$a + 2n + 1 = \frac{2ap}{a}$$

$$a + 2n + 1 = 2p$$

$$2n = 2p - (1 + a) \quad (4)$$

であるから、 $1 + a$ は偶数でなければならない。したがって、 a は奇数である。
 ここで、 $S = 1000$ であるから、 $S = 10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$ である。
 a は奇数なので、 $5, 5^2, 5^3$ しかありえない。

1) $a = 5$ なら、 $S = ap$ だから、 $p = 200$ なので、

$$2n = 2p - (1 + a)$$

$$2n = 2 \times 200 - (1 + 5)$$

$$= 394$$

$$n = 197$$

よって、198, 199, 200, 201, 202

2) $a = 25$ なら、 $S = ap$ だから、 $p = 40$ なので、

$$2n = 2p - (1 + a)$$

$$2n = 2 \times 40 - (1 + 25)$$

$$= 54$$

$$n = 27$$

よって、28, 29, 30, ..., 51, 52

3) $a = 125$ なら、 $S = ap$ だから、 $p = 8$ なので、

$$2n = 2p - (1 + a)$$

$$2n = 2 \times 8 - (1 + 125)$$

$$= -110$$

$$n = -55$$

これより、 -54 から 70 の 125 個の和は、 -54 と 54 は打ち消されるから、同様にして、 -1 と 1 まで消えるので、 55 から 70 の和である。よって、答えは

1) 198, 199, 200, 201, 202

2) 28, 29, 30, ..., 51, 52

3) 55, 56, 57, ..., 69, 70

1.2 応用

さて、この問題から a は奇数でなければならないから、連続する正の数からその一部の連続するいくつかの数を足した組みの総和が 2^n になることはないと導かれる。

2 その2

$(6 + \sqrt{5})^3 + (6 - \sqrt{5})^3$ を計算しなさい。というような感じの問題があった。

2.1 解答案

$(6 + \sqrt{5})^3 + (6 - \sqrt{5})^3$ を $(x + y)^3 + (x - y)^3$ とする。

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) + (x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$$

そこで、

$$\begin{aligned} & x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ & + x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \end{aligned}$$

から、 y の奇数乗の項は消えるので、

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = (x^3 + 3xy^2) + (x^3 + 3xy^2)$$

$$(x + y)^3 + (x - y)^3 = 2(x^3 + 3xy^2)$$

よって、

$$\begin{aligned} (6 + \sqrt{5})^3 + (6 - \sqrt{5})^3 &= 2 \times (6^3 + 3 \times 6(\sqrt{5})^2) \\ &= 2 \times (6^3 + 3 \times 6 \times 5) \\ &= 2 \times (216 + 90) \\ &= 2 \times 306 \\ &= 612 \end{aligned}$$

2.2 応用

$(x + y)^n + (x - y)^n$ において、 n が奇数なら、

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= x^n + k_1x^{n-1}y + k_2x^{n-2}y^2 + \cdots + k_{n-2}x^2y^{n-2} + k_{n-1}x^1y^{n-1} + y^n \\ + (x - y)^n &= x^n - k_1x^{n-1}y + k_2x^{n-2}y^2 - \cdots - k_{n-2}x^2y^{n-2} + k_{n-1}x^1y^{n-1} - y^n \end{aligned}$$

から、 y の奇数乗の項は消えるので、

$$(x + y)^n + (x - y)^n = 2(x^n + k_2x^{n-2}y^2 + \cdots + k_{n-1}x^1y^{n-1})$$

となり、 x, y にかかわらず偶数であり、また、 y は平方根でも偶数である。

$(x + y)^n + (x - y)^n$ において、 n が偶数なら、

$$\begin{aligned} (x + y)^n &= x^n + k_1x^{n-1}y + k_2x^{n-2}y^2 + \cdots + k_{n-2}x^2y^{n-2} + k_{n-1}x^1y^{n-1} + y^n \\ + (x - y)^n &= x^n - k_1x^{n-1}y + k_2x^{n-2}y^2 - \cdots + k_{n-2}x^2y^{n-2} - k_{n-1}x^1y^{n-1} + y^n \end{aligned}$$

から、 y の奇数乗の項は消えるので、

$$(x + y)^n + (x - y)^n = 2(x^n + k_2x^{n-2}y^2 + \cdots + k_{n-2}x^2y^{n-2} + y^n)$$

となり、 x, y にかかわらず偶数であり、また、 y は平方根でも偶数である。

よって、 $(x + y)^n + (x - y)^n$ は、 x, y にかかわらず偶数であり、また、 y は平方根でも偶数である。