$(a+b)^n - a^n - b^n \quad$ (ただし、a, b, n は自然数) は偶数

壊れた扉さん、愛犬ベルのために

最新 2021 年 11 月 22 日

はじめに

これは、BBS「数の不思議議世界」で、壊れた扉さんとの共同作業によってできた共同作品です。なお、これは、壊れた扉さんの 2021-11-20 の投稿を清書したものです。

更新履歴

2021.11.22　新規作成

1　定理

$(a+b)^n - a^n - b^n$ は a, b, n の値に関わらず偶数である。ただし、a, b, n は自然数とする。

2　証明

2.1　n が奇数の場合

n が奇数の場合、a, b の少なくとも一方が偶数ならば二項定理を考えれば偶数である事は自明なので、a, b が共に奇数の場合を考える。

$$(a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + {}_nC_2a^{n-2}b^2 + \cdots + {}_nC_{n-1}ab^{n-1} + {}_nC_nb^n$$

この右辺の項数は $n+1$ 個より、$(a+b)^n - a^n - b^n$ の項数は $n-1$ 個である。また、n は奇数より偶数個である。[*1]

ところで、公式より、${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ [*2]

[*1] 以下において $\frac{n-1}{2}$、$\frac{n+1}{2}$ がでてくるが自然数である。なぜなら n は奇数より、$n \pm 1$ は偶数なので

[*2] $https://detail.chiebukuro.yahoo.co.jp/qa/question_detail/q1235865532$

よって、後半を公式で変換して前後でまとめると、

$$(a+b)^n - a^n - b^n = {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1}$$

$$= {}_n C_1 (a^{n-1} b + a b^{n-1}) + \cdots {}_n C_r (a^{n-r} b^r + a^r b^{n-r}) + \cdots + {}_n C_{\frac{n-1}{2}} (a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} + a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}})$$

ところで、a, b は共に奇数より ( ) 内は全て偶数である。

よって、n が奇数の場合、$(a+b)^n - a^n - b^n$ は a, b の値に関わらず偶数である。

2.2 n が偶数の場合

n が偶数の場合も a, b の少なくとも一方が偶数ならば二項定理を考えれば偶数である事は自明なので、a, b が共に奇数の場合を考える。

$n = 2m$(mは自然数) とすると、

$$(a+b)^{2m} = {}_{2m} C_0 a^{2m} + {}_{2m} C_1 a^{2m-1} b + {}_{2m} C_2 a^{2m-2} b^2 + \cdots + {}_{2m} C_{2m-1} a b^{2m-1} + {}_{2m} C_{2m} b^{2m}$$

この右辺の項数は $2m+1$ 個より奇数個である。ところで、公式より、${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$

よって、後半を公式で変換して前後でまとめると、

$$(a+b)^{2m} = {}_{2m} C_0 (a^{2m} + b^{2m}) + {}_{2m} C_1 (a^{2m-1} b + a b^{2m-1}) + {}_{2m} C_2 (a^{2m-2} b^2 + a^2 b^{2m-2})$$
$$+ \cdots + {}_{2m} C_{m-1} (a^{m+1} b^{m-1} + a^{m-1} b^{m+1}) + {}_{2m} C_m a^m b^m$$
$$\therefore (a+b)^n - a^n - b^n = {}_{2m} C_1 (a^{2m-1} b + a b^{2m-1}) + {}_{2m} C_2 (a^{2m-2} b^2 + a^2 b^{2m-2})$$
$$+ \cdots + {}_{2m} C_{m-1} (a^{m+1} b^{m-1} + a^{m-1} b^{m+1}) + {}_{2m} C_m a^m b^m$$

ところで、a, b が共に奇数より ( ) 内は全て偶数である。よって、${}_{2m}\mathrm{C}_m$ が偶数ならば良いが補題よりこれは偶数である。

よって、n が偶数の場合、$(a+b)^n - a^n - b^n$ は a, b の値に関わらず偶数である。

以上より、n が偶数でも、奇数でも、$(a+b)^n - a^n - b^n$ は a, b, n の値に関わらず偶数である。

よって、示された。

2.2.1 補題

${}_{2n} C_n$ は偶数である。ただし、n は自然数とする。

証明

二項定理より、

$$(a+b)^{2m} ={}_{2n} C_0 a^{2n} +{}_{2n} C_1 a^{2n-1}b +{}_{2n} C_2 a^{2n-2}b^2 + \cdots +{}_{2n} C_{2n-1} ab^{2n-1} +{}_{2n} C_{2n} b^{2n}$$

これを上と同様にまとめると、

$$\begin{gathered}(a+b)^{2n} ={}_{2n} C_0(a^{2n}+b^{2n}) +{}_{2n} C_1(a^{2n-1}b+ab^{2n-1}) +{}_{2n} C_2(a^{2n-2}b^2+a^2b^{2n-2}) \\ + \cdots +{}_{2n} C_{n-1}(a^{n+1}b^{n-1}+a^{n-1}b^{n+1}) +{}_{2n} C_n a^n b^n\end{gathered}$$

これに $a=b=1$ を代入すると、$2^{2n}=2({}_{2n}C_0 +{}_{2n} C_1 +{}_{2n} C_2 + \cdots +{}_{2n} C_{n-1}) +{}_{2n}C_n$

左辺が偶数で右辺も偶数であるには、${}_{2n}C_n$ は偶数でなければならない。よって、示された。